Teht. *Osoitettava, että kaikilla* $x \in]0,1[$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x) \;>\; 1.$$

Ratk. Olkoon $f:]0,1[\to \mathbf{R}$,

$$f(x) \;=\; \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x).$$

Epäyhtälö todistuu osoittamalla, että

1° $f(x) \to 1$, kun $x \to 0+$, ja
2° $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]0,1[$.

1° Merkitään $v(x) = \ln(1+x)$. Raja-arvo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln(1+x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{v(x)-v(0)}{x-0} + \lim_{x\to 0+}\tfrac{1}{2}v(x) \\
&= v'(0)+0 = 1+0 = 1.
\end{aligned}$$

2° Derivaatta

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{2(1+x)} \\
&= \frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \\
&= \frac{2+x}{2x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 \quad &\iff \quad \frac{2+x}{2x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} > 0 \;\wedge\; (0<x<1) \\
&\iff \quad \frac{2+x}{2x(1+x)} > \frac{\ln(1+x)}{x^2} \;\wedge\; (0<x<1) \\
&\iff \quad \frac{x(2+x)}{2(1+x)} > \ln(1+x) \;\wedge\; (0<x<1) \\
&\iff \quad u(x) > v(x) \;\wedge\; (0<x<1).
\end{aligned}$$

Siis $f'(x) > 0$, jos ja vain jos $u(x) > v(x)$, missä

$$u(x) \;=\; \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}, \quad v(x) \;=\; \ln(1 + x) \quad \text{ja} \quad 0 < x < 1.$$

Nähdään välittömästi, että $u(0) = v(0) = 0$; osoitetaan, että u kasvaa nopeammin kuin v. Derivaatat

$$u'(x) \;=\; \frac{(2x + 2)^2 - 2(x^2 + 2x)}{(2x + 2)^2} \;=\; \frac{x^2 + 2x + 2}{2(x + 1)^2}$$

ja

$$v'(x) \;=\; \frac{1}{1 + x},$$

joten välillä $]0, 1[$

$$\begin{aligned} u'(x) > v'(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 + 2x + 2}{2(x + 1)^2} \;>\; \frac{1}{1 + x} \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2x + 2 \;>\; 2x + 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 > 0, \text{ tosi.} \end{aligned}$$

Lyhyempi todistus

Alkuperäinen epäyhtälö saadaan välillä $]0, 1[$ yhtäpitävästi muotoon

$$v(x) \;=\; \ln(1 + x) \;>\; \frac{2x}{2 + x} \;=\; w(x).$$

Funktioilla v ja w on sama arvo määrittelyvälin alarajalla. Derivaattoja tutkimalla nähdään, että v kasvaa nopeammin kuin w, joten $v(x) > w(x)$.