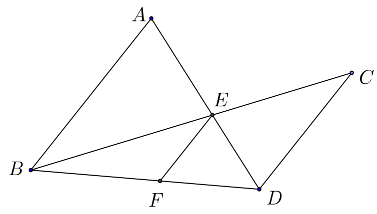
Yksi tehtävä, vielä useampia ratkaisuja

Lukijan ratkaisu

Todistetaan ensin tunnettukin aputulos: Olkoot AB ja CD yhdensuuntaisia janoja niin, että AD ja BC leikkaavat toisensa pisteessä E. Olkoon vielä F se BD:n piste, jolle $EF \| AB$. Silloin



$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}.$$

Todistus: Yhdenmuotoisista kolmioista ABD ja EFD nähdään, että

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BD}. \tag{1}$$

Samoin yhdenmuotoisista kolmioista BDC ja BFE nähdään, että

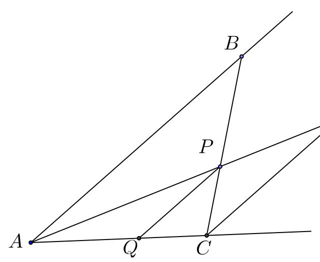
$$\frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BD}. \tag{2}$$

Kun (1) ja (2) lasketaan puolittain yhteen ja otetaan huomioon, että $BF + FD = BD$, saadaan

$$\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 1,$$

eli väite. (On itse asiassa osoitettu, että puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspisteen kautta kulkeva, puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen suuntainen puolisuunnikkaan kyljet yhdistävä jana on pituudeltaan yhdensuuntaisten sivujen harmoninen keskiarvo.)

Siirrytään sitten varsinaiseen ratkaisuun. Piirretään C:n kautta AB:n suuntainen suora. Se leikkaa puolisuoran AP pisteessä D. Leikatkoon vielä AB:n suuntainen P:n kautta kulkeva suora AC:n pisteessä Q- Aputuloksen mukaan



$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{PQ}.$$

Mutta koska AP on kulman $\angle BAC$ puolittaja ja $CD \| AB$,
on $\angle DAC = \angle DAB = \angle ADC$. Kolmio DAC on siis tasakylkinen, $CD = AC$, joten

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{PQ}.$$

PQ riippuu vain pisteestä P, muttei B:stä, joten väite on todistettu.

Vielä yksi vektoriratkaisu

Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ ja $\overrightarrow{AP} = \vec{a}$. Koska P on janalla BC,

$$\vec{a} = p\vec{u} + (1-p)\vec{v} \tag{3}$$

jollain p, $0 < p < 1$. Nyt $\vec{u}\cdot\vec{a} = |\vec{u}||\vec{a}|\cos(\vec{u}, \vec{a})$ ja $\vec{v}\cdot\vec{a} = |\vec{v}||\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{v})$. Koska AP on kulman $\angle BAC$ puolittaja, kulmat $(\vec{u}, \vec{a})$ ja $(\vec{a}, \vec{v})$ ovat yhtä suuret. Siis $(\vec{u}\cdot\vec{a})|\vec{v}| = (\vec{v}\cdot\vec{a})|\vec{u}|$. Kun tähän sijoitetaan $\vec{a}$:n lauseke (3), saadaan

$$|\vec{v}|\left(p|\vec{u}|^2 + (1-p)\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = |\vec{u}|\left(p\vec{u}\cdot\vec{v} + (1-p)|\vec{v}|^2\right).$$

Tämä sievenee muotoon

$$p|\vec{u}|(|\vec{u}||\vec{v}| - \vec{u}\cdot\vec{v}) = (1-p)|\vec{v}|(|\vec{u}||\vec{v}| - \vec{u}\cdot\vec{v}).$$

Koska $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat erisuuntaisia, $\vec{u}\cdot\vec{v} < |\vec{u}||\vec{v}|$. Siis

$$\frac{p}{1-p} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}.$$

(Olemme tässä tulleet esittäneeksi vektoriversion tunnetun lauseen ”kolmion kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa” todistuksesta.) Siis

$$\frac{1}{|\vec{u}|} + \frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{u}|}\left(1 + \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}\right) = \frac{1}{|\vec{u}|}\left(1 + \frac{1-p}{p}\right) = \frac{1}{p|\vec{u}|}.$$

On vielä osoitettava, että $p|\vec{u}|$ ei riipu B:n valinnasta. Lausutaan $\vec{a}$ $\vec{u}$:n ja $\vec{v}$:n suuntaisten yksikkövektorien avulla:

$$\vec{a} = t\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} + s\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = p\vec{u} + (1-p)\vec{v}.$$

Kertoimet t ja s eivät riipu B:n valinnasta, vaan ainoastaan kulman $\angle BAC$ kylkien suuntaisista yksikkövektoreista. Mutta

$$\left(\frac{t}{|\vec{u}|} - p\right)\vec{u} = \left(1 - p - \frac{s}{|\vec{v}|}\right)\vec{v}. \tag{4}$$

Koska $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat erisuuntaiset, (4) voi toteutua vain, jos yhtälön molemmat puolet ovat nollavektoreita. Siis $p|\vec{u}| = t$, ja t ei riipu B:stä, joten ratkaisu on valmis.